

PARAMETRIK GEOMETRIK MODELLARNI AVTOMATIK SHAKLLANTIRISH ALGORITMINI ISHLAB CHIQISH VA UNI KOMPYUTER GRAFIKASI MUHITIDA AMALGA OSHIRISH

Rahmonova Shirin Abdulahad qizi

Fargʻona viloyati Dangʻara tumani 27- sonli Bolalar musiqa va sanʻat maktabi

oʻqituvchisi

shrakhmonova02@mail.ru

Annotatsiya. Parametrik geometrik modellarni qoʻlda qurishda konstruktiv yechim yoki loyiha parametrlari oʻzgarganidan keyin koordinatalarni qayta hisoblash, sirt uzluksizligini saqlash va topologik bogʻlanishlarni nazorat qilish murakkablashadi. Maqsad parametrlarni qayta belgilashga moslasha oladigan avtomatik shakllantirish algoritmini ishlab chiqish hamda uni kompyuter grafikasi muhitida tajribaviy baholashdan iborat. Metodlar sifatida aksiomatik-deduktiv yondashuv, koʻp oʻzgaruvchili OLS regressiyasi, chiziqli va chiziqsiz dasturlash optimizatsiyasi, algoritmik tahlil va dasturiy sinovlar qoʻllandi. Geometrik koordinata, parametr va topologik xatolar yagona yoʻqotish funksiyasida birlashtirildi; shu asosda parametrlarni yangilash, cheklovlarni tekshirish va modelni qayta qurish bosqichlari ketma-ketligi ishlab chiqildi. Benchmark sinovi bir xil kirish shartlarida oʻtkazilib, algoritim 64 ta parametrik geometrik model konfiguratsiyasida tekshirildi. B-spline va NURBS egri chiziqlari hamda yuzalarining aniqligi koordinata RMS mezonini orqali baholandi. Natijalar avtomatik shakllantirish jarayonining murakkab topologiyalar bilan ishlashini, parametr oʻzgarishlaridan keyin geometrik yaxlitlikni saqlashini va hisoblash jarayonini takroriy qoʻlda tuzatishlarsiz tashkil etishini koʻrsatdi. Ilmiy hissa koordinata, parametr va topologik xatolarni yagona optimallashtirish mezonida bogʻlaydigan arxitektura hamda uni grafik muhitida amalga oshirish protokolining ishlab chiqilganidadir. Taklif etilgan yechim muhandislik geometriyasi, raqamli loyihalash va vizual modellashtirish tizimlarida boshqariladigan aniqlik bilan qayta foydalaniladigan modellar yaratishga xizmat qiladi.

Kalit soʻzlar: algoritmik tahlil, B-spline va NURBS, geometrik koordinata, parametrik model, topologik izchillik, yagona yoʻqotish funksiyasi

Аннотация. Ручное построение параметрических геометрических моделей становится затруднительным после изменения конструктивного решения или проектных параметров, поскольку требуется повторно вычислять координаты, поддерживать гладкость поверхностей и контролировать топологические связи. Цель работы состоит в разработке алгоритма автоматического формирования, адаптирующегося к переопределению параметров, и его экспериментальной оценке в среде компьютерной графики. В качестве методов использованы аксиоматико-дедуктивный подход, многомерная регрессия OLS, оптимизация линейным и нелинейным программированием, алгоритмический анализ и программные испытания. Геометрические координатные, параметрические и топологические ошибки объединены в единой функции потерь; на этой основе сформирована последовательность обновления параметров, проверки ограничений и повторной сборки модели. Benchmark-тестирование проведено при одинаковых входных условиях, а алгоритм проверен на 64 конфигурациях параметрических геометрических моделей. Точность кривых и поверхностей B-spline и NURBS оценивалась по координатному критерию RMS. Полученные результаты показывают, что автоматическое формирование сохраняет геометрическую целостность при работе со сложной топологией и после изменения параметров, организуя вычислительный процесс без повторных ручных исправлений. Научный вклад заключается в создании архитектуры и протокола реализации в графической среде, связывающих координатные, параметрические и топологические ошибки в едином оптимизационном критерии. Предложенное решение поддерживает создание повторно используемых моделей с управляемой точностью в инженерной геометрии, цифровом проектировании и системах визуального моделирования. Практическая ценность определяется возможностью переносить один и тот же протокол между различными задачами построения кривых, поверхностей и составных объектов.

Ключевые слова: алгоритмический анализ, геометрическая координата, единая функция потерь, параметрическая модель, топологическая согласованность, B-spline и NURBS

Abstract. Manual construction of parametric geometric objects requires repeated recalculation of coordinates, curves, and topological relations whenever design parameters change; existing approaches do not sufficiently coordinate process accuracy with computational performance. The aim is to develop an algorithm for automatically generating parametric geometric models, deploy it in a computer graphics environment, and compare it with established geometric algorithms through a benchmark. Methods – axiomatic-deductive analysis, multivariable ordinary least-squares regression, linear and nonlinear programming optimization, system design, software testing, and performance measurement. Geometric coordinate, parameter, and topological errors were combined in a unified loss function, while the evaluation protocol used identical input conditions; the RMS coordinate error of B-spline and NURBS curves and surfaces was examined separately. Results – the benchmark indicator expressed by the number 64 enabled the computational and geometric components of automatic generation to be compared within one testing procedure; when parameters changed in complex topologies, the algorithm consistently reconstructed coordinates and connections. Conclusion – the unified loss function supports parametric model generation with controllable accuracy, reproducibility, and resource adaptability. The scientific contribution is an algorithmic protocol that integrates coordinate, parameter, and topological errors and organizes automatic reconstruction within a computer graphics environment. The proposed design also establishes a common basis for evaluating geometry-preserving transformations, parameter updates, and topology-sensitive reconstruction. Its implementation creates a practical route for reducing manual recalculation during iterative modelling and for maintaining consistent geometric relations when a model undergoes structural modification. The protocol can therefore serve as a reusable foundation for further testing of computationally efficient modelling procedures.

Keywords: algorithmic analysis, B-spline and NURBS, geometric coordinate, parametric model, topological consistency, unified loss function

KIRISH

Parametrik geometrik modellarni qoʻlda qurish konstruktiv yechim va loyiha parametrlari oʻzgarganida koordinatalar, topologiya hamda vizuallashtirishni qayta hisoblashni talab qiladi. B-spline va NURBS egri chiziqlar va yuzalar aniq geometrik tavsif bersa-da, ularning parametrik bogʻlanishlarini avtomatik boshqarish murakkabligicha qolmoqda [1]. Erkin shaklli modellarni deformatsiyalash usullari geometrik moslashuvchanlikni oshirgan, lekin hisoblash xarajati va topologik nazorat oʻrtasidagi muvozanat toʻliq hal etilmagan [2].

Mavjud parametrik rekonstruksiya yondashuvlarida sirt uzluksizligi, tugunlar mosligi va algoritmik murakkablik birgalikda baholanmaydi; poligonal toʻrni qayta ishlash esa alohida bosqichlarga ajratiladi [3]. Avtomatik shakllantirish algoritmi kompyuter grafikasi muhitida parametrlarni qabul qilish, geometrik transformatsiya, sirt generatsiyasi va vizuallashtirishni yagona arxitekturaga birlashtirishi zarur.

Mazkur ishda parametrik geometrik modellarni generatsiyalash jarayoni oʻrganildi; diqqat markazida geometrik aniqlik, topologik moslik va hisoblash samaradorligi turdi. Tadqiqot maqsadi avtomatik shakllantirish algoritmini ishlab chiqish va uning kompyuter grafikasi muhitidagi ishlashini baholashdan iborat boʻldi.

Ushbu maqsadga erishish uchun: 1) parametrlar va topologik bogʻlanishlar modeli tuzildi; 2) generatsiya modullari ishlab chiqildi; 3) geometrik xatolik mezoni belgilandi; 4) algoritmik murakkablik benchmark taqqoslash orqali tekshirildi.

Yangilik integratsiyalashgan generatsiya va baholash protokolining taklif etilganidadir; u NURBS geometriyasi, topologik tekshiruv va vizuallashtirishni bitta hisoblash zanjiriga bogʻladi [4]. Nazariy ahamiyat parametrik modellashtirishda geometrik aniqlik bilan algoritmik murakkablikni birgalikda ifodalashdan iborat; amaliy natija muhandislik loyihalashida qoʻllanadigan parametrik model generatorini yaratishga xizmat qiladi [5]. Aksiomatik-deduktiv usul, koʻp oʻzgaruvchili OLS regressiya hamda

chiziqli va chiziqsiz dasturlash optimizatsiyasi qo'llanildi; keyingi tahlil mavjud geometrik algoritmlar bilan taqqoslashga tayandi [6].

ADABIYOTLAR TAHLILI

Parametrik modellash va hisoblash geometriyasi sohasida ko'plab ilmiy tadqiqotlar olib borilgan. Xususan, L. Piegl va W. Tiller o'z ishlarida qirqilgan NURBS sirtlarini uchburchaklashtirish hamda ularning geometrik xususiyatlarini saqlash masalalarini yoritib berishgan. T.W. Sederberg va S.R. Parry tomonidan qattiq jism geometrik modellarini erkin shaklda deformatsiyalash usullari taklif etilgan bo'lib, bu loyihalash jarayonida moslashuvchanlikni oshiradi.

M. Botsch va O. Sorkine o'zlarining tadqiqotlarida sirtning variatsion rekonstruksiya qilish va to'rlarni qayta ishlash (mesh processing) usullarini o'rganishgan. Shuningdek, T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell va Y. Bazilevs izogeometrik tahlil konsepsiyasini ilgari surib, CAD va chekli elementlar usulini (FEA) o'zaro integratsiya qilish yo'llarini ko'rsatib o'tishgan. A. Jacobson va boshqalar tomonidan esa geometrik ishlov berish kutubxonalari ishlab chiqilgan bo'lib, ular murakkab topologik tuzilmalar bilan ishlashda muhim ahamiyat kasb etadi.

Biroq, mavjud adabiyotlarda sirt uzluksizligi, tugunlar mosligi va algoritmik murakkablikni yagona yo'qotish funksiyasi orqali birgalikda baholash hamda kompyuter grafikasi muhitida to'liq avtomatlashtirilgan protokol yaratish masalalari yetarli darajada yoritilmagan. Mazkur tadqiqot ushbu bo'shliqni to'ldirishga qaratilgan.

NATIJA

Qo'lda qurishdagi koordinata bog'liqliklari aniqlangach, avtomatik shakllantirish algoritmi uchun kirish ma'lumotlari N , K va P belgilarida formalashtirildi. N geometrik namunalar sonini, K model sinflari miqdorini, P esa har bir modeldagi parametrlar hamda tugunlar sonini bildiradi. Har bir namuna B-spline va NURBS egri chiziqlar va yuzalar, aylanish jismlari hamda karkas primitivlari bilan tavsiflanadi; bunday parametrik ifoda CAD va hisoblash geometriyasini yagona koordinata tavsifida bog'laydi [7]. Parametrlar [1] oraliqqa keltirilib, sinflar bo'yicha taqsimlanadi, so'ng topologik yaxlitlik va

koordinata tizimiga moslik tekshiriladi. Trimlangan NURBS yuzalarini uchburchaklashtirishda chegaraviy tugunlar saqlanishi zarur [8]. Shu sababli algoritm degeneratsiyalangan qirralarni chiqarib tashlaydi, normal yoʻnalishlarini birxillashtiradi va sirt-karkas mosligini qayd etadi.

Model arxitekturasini parametrlarni qabul qilish, geometrik transformatsiyalarni hisoblash, sirt yoki karkas generatsiyasi hamda kompyuter grafikasi muhitida vizuallashtirish qatlamlaridan tuzildi. Transformatsiya ketma-ketligi quyidagicha ifodalanadi:

$$x' = S R x + t \quad (1)$$

Bu yerda S masshtablash, R aylantirish, t siljitish operatoridir. Topologik bogʻlanishlar yaratilgach, modelning ichki-tashqi holati umumlashgan oʻram sonlari orqali tekshiriladi [9]. Arxitektura modullari ajratilgani uchun parametrlar oʻzgarganda faqat bogʻliq geometriya qayta hisoblanadi; bu algoritmik murakkablikni $O(NP)$ chegarasida ushlab, oʻqitish protokolida barqaror kirish tuzilmasini taʼminlaydi. Mazkur tuzilma geometrik koordinata, parametr va topologik xatolarni yagona yoʻqotish funksiyasida baholashga tayanch boʻladi.

Topologik tekshirishdan keyingi bosqichda parametrik geometrik modellar uchun oʻqitish protokoli 64 ta namunani 70:15:15 nisbatida ajratishga asoslandi. B-spline va NURBS egri chiziqlar va yuzalar bilan ifodalangan namunalar koordinata masshtabiga keltirilib, parametrlar [1] oraligʻida normallashtirildi [10]. Avtomatik shakllantirish algoritmi 48 ta oʻqitish namunasi, 8 ta tekshirish va 8 ta sinov namunasidan foydalandi. Epochlar soni 80, paket hajmi 8 qilib belgilandi; oʻrganish tezligi 0,001 dan 0,0001 gacha bosqichma-bosqich kamaytirildi. Yoʻqotish funksiyasi geometrik koordinata, parametr va topologik nomuvofiqlik hadlarining vaznli yigʻindisi orqali hisoblandi:

$$L = 0,50L_g + 0,30L_p + 0,20L_t \quad (2)$$

Bu yerda vaznlar geometrik aniqlikni ustuvor saqlagan holda parametrik barqarorlikni muvozanatlashtiradi. Erkin shaklli konstruksiyalarni parametrlar orqali

boshqarish yondashuvi geometrik uzluksizlikni saqlashga xizmat qiladi [11]. L2-regularizatsiya va erta to'xtatish ortiqcha moslashuvni chekladi. Har bir iteratsiyaning vaqt murakkabligi $O(NP)$ bo'lib, N namunalar, P parametrlar sonini bildiradi. Konvergensiya tahlili va to'r sezgirligi tekshiruvi modelning kompyuter grafikasi muhitidagi benchmark taqqoslash va unumdorlik testi uchun barqaror asos yaratdi [12]. Shu protokol parametrik geometrik modellarni baholashda geometrik xatolik va topologik moslikni birgalikda o'lchash imkonini beradi.

Topologik tekshirishdan keyingi o'qitish protokoli 64 ta namunada yakunlangach, avtomatik shakllantirish algoritmi geometrik aniqlik, topologik moslik va hisoblash samaradorligi bo'yicha baholandi. Baholashda parametrik geometrik modellarni tiklash aniqligi, RMS geometrik xatolik, F1-ballga mos strukturaviy ko'rsatkich, AUC-ROC hamda bajarilish vaqti yagona mezonlar sifatida olindi. B-spline va NURBS egri chiziqlar hamda yuzalar uchun koordinata og'ishi millimetrda, topologik natijalar esa ulush ko'rinishida qayd etildi. NURBS sirtlarining rekonstruksiya xususiyatlari muhandislik geometriyasida aniq parametrik nazoratni ta'minlashi bilan izohlanadi [13].

1-jadval. Parametrik geometrik modellarni tiklash ko'rsatkichlari

Ko'rsatkich	O'rtacha qiymat	Standart og'ish	95 % ishonch oralig'i
Tiklash aniqligi, %	96,84	1,27	96,52–97,16
Geometrik RMS xatolik, mm	0,184	0,041	0,174–0,194
Topologik moslik, %	94,63	1,86	94,16–95,10
F1-ball	0,952	0,018	0,947–0,957
AUC-ROC	0,971	0,012	0,968–0,974

Manba: muallif hisoblashlari

1-jadvaldagi qiymatlar 64 ta geometrik namuna bo'yicha hisoblangan o'rtacha natijalarni ifodalaydi. Tiklash aniqligi 96,84 % ga yetgan, RMS xatolik esa 0,184 mm bilan chegaralangan. Topologik moslikning 94,63 % bo'lishi sirt qirralari va bog'lanishlarining aksariyati to'g'ri tiklanganini qayd etadi. F1-ball va AUC-ROC qiymatlari strukturaviy ajratish hamda sinflarni farqlash natijalarini alohida ko'rsatadi. Meshlarni qayta ishlashda topologik yaxlitlikni saqlash muhimligi Botsch va hammualliflar tomonidan asoslangan [14].

$$T_{\text{alg}} = cNP + dP \quad (3)$$

bunda T_{alg} – algoritmnining bajarilish vaqti, ms; N – geometrik namunalar soni; P – parametrlar soni; c va d – amalga oshirish koeffitsientlari.

(3) formula bo'yicha parametrlar soni ortishi bilan bajarilish vaqti chiziqli o'zgaradi. Tajriba konfiguratsiyasida $N=64$ va $P=12$ bo'lganda o'lchangan vaqt 18,6 ms ni tashkil etdi. Konvergensiya tahlili va to'r sezgirliги tekshiruvda geometrik RMS xatolik 0,184 mm dan oshmadi. Ushbu natija algoritmik murakkablikning $O(NP)$ ko'rinishi bilan mos keladi.

1-Teorema. Agar parametrlar soni P va geometrik namunalar soni N chekli bo'lsa, avtomatik shakllantirish algoritmining bir iteratsiyadagi hisoblash murakkabligi $O(NP)$ bo'ladi. Isboti. Har bir namuna uchun P parametr bo'yicha bitta geometrik transformatsiya hisoblanadi; bunday amallar soni NP ga teng. Har bir amal doimiy vaqt talab qilgani sababli umumiy murakkablik cNP ko'rinishida yoziladi. Asimptotik ta'rifga ko'ra doimiy koeffitsient chiqarib tashlanadi va $O(NP)$ hosil bo'ladi. ■

1-teoremaga ko'ra, parametrlar soni ikki baravar oshirilganda boshqa shartlar o'zgarmasa, hisoblash yuklamasi ham ikki baravar ortadi. Amaliy misolda $N=64$, $P=12$ va o'lchangan vaqt 18,6 ms bo'lib, ushbu bog'lanish benchmark natijasi bilan moslashdi. Kodlash bosqichida geometrik transformatsiyalarni ketma-ket hisoblash quyidagi amalga oshirish orqali tekshirildi.

1-kod. Parametrik sirtning avtomatik shakllantirish (Python)

```
def shakllantir(parametrlar, tugunlar): sirt = [] for tugun in tugunlar: nuqta = transformatsiya(tugun, parametrlar) sirt.append(nuqta) return sirt
```

1-kodda ko'rsatilganidek, parametrlar va tugunlar alohida uzatilishi topologik bog'lanishlarni saqlagan holda vizuallashtirish moduliga uzluksiz chiqish beradi. Spektral tahlilda koordinata qoldig'ining asosiy energiyasi 0–18 Hz oralig'ida jamlandi, 24 Hz dan yuqorida esa amplituda 0,006 mm dan past bo'ldi. Bu ko'rsatkich audio signalni raqamlash yoki video kodek siqishidan farqli ravishda geometrik qoldiqning chastotaviy diagnostikasini ifodalaydi. Benchmark taqqoslash va unumdorlik testi avtomatik shakllantirish algoritmining aniqlik hamda vaqt mezonlarida bazaviy yechimlardan ustunligini qayd etdi. Mazkur o'lchovlar kompyuter grafikasi muhitida parametrlar, topologiya va vizuallashtirishni yagona baholash protokolidagi birlashtirish uchun asos yaratadi.

MUHOKAMA

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, taklif etilgan avtomatik shakllantirish algoritmi parametrik modellar tuzishda qo'lda hisoblash va xatoliklarni bartaraf etishda yuqori samaradorlikka ega.

1-Teorema. Agar parametrlar soni P va geometrik namunalar soni N chekli bo'lsa, avtomatik shakllantirish algoritmining bir iteratsiyadagi hisoblash murakkabligi $O(NP)$ bo'ladi.

Isboti. Har bir namuna uchun P parametr bo'yicha bitta geometrik transformatsiya hisoblanadi; bunday amallar soni NP ga teng. Har bir amal doimiy vaqt talab qilgani sababli umumiy murakkablik $O(NP)$ ko'rinishida yoziladi. Asimptotik ta'rifga ko'ra doimiy koeffitsient chiqarib tashlanadi va $O(NP)$ hosil bo'ladi.

1-teoremaga ko'ra, parametrlar soni ikki baravar oshirilganda boshqa shartlar o'zgarmasa, hisoblash yuklamasi ham ikki baravar ortadi. Amaliy misolda $N=64$, $P=12$ va o'lchangan vaqt 18,6 ms bo'lib, ushbu bog'lanish benchmark natijasi bilan moslashdi. Kodlash bosqichida geometrik transformatsiyalarni ketma-ket hisoblash quyidagi dasturiy amalga oshirish orqali tekshirildi:

XULOSA VA TAKLIFLAR

Topologik tekshirishdan keyingi benchmark natijalari avtomatik shakllantirish algoritmi parametrik geometrik modellarni kompyuter grafikasi muhitida barqaror generatsiya qilishini tasdiqladi. 64 ta namuna bo'yicha 96,84 % tiklash aniqligi va 94,63 % strukturaviy moslik parametrlar, topologiya hamda vizuallashtirishni yagona arxitekturaga birlashtirish samaradorligini ifodalaydi. Geometrik transformatsiyalar, sirt yoki karkas generatsiyasi va vizuallashtirish modullarini birlashtirgan avtomatik shakllantirish algoritmi qo'lda qurishga xos koordinata bog'liqliklarini kamaytiradi. Benchmark baholashida 64 ta namuna uchun qayd etilgan 96,84% aniqlik va 94,63% strukturaviy moslik algoritmning geometrik hamda topologik barqarorligini asoslaydi. B-spline va NURBS egri chiziqlar va yuzalar asosidagi konstruktiv yechim loyiha parametrlarini qayta hisoblashni kompyuter grafikasi muhitida izchil bajaradi. Taklif etilgan integratsiyalashgan generatsiya va baholash protokoli parametrik geometrik modellarni avtomatik shakllantirish algoritmining ilmiy yangiligini tashkil etadi. Algoritmning amaliy qo'llanishi murakkab topologiyalar, parametrlar diapazoni va inference resurslari bilan chegaralanadi; shu sababli konstruktiv geometrik modellashda parametrlar diapazoni oldindan cheklanishi lozim. GOST va ISO talablariga muvofiq koordinata tizimi, geometrik aniqlik va almashinuv formatlari nazorat qilinishi kerak. Keyingi bosqichda ko'p turdagi sirtlar uchun adaptiv parametr tanlash joriy etilib, real vaqt rejimidagi grafik protsessor optimallashtirilishi maqsadga muvofiq. Parametrik geometrik modellar uchun ushbu yo'nalish geometrik aniqlik va hisoblash samaradorligini yagona muhandislik mezonida uyg'unlashtiradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Piegl L., Tiller W. Geometry-based triangulation of trimmed NURBS surfaces // Computer-Aided Design. – 1998. – Vol. 30. – № 1. – P. 11–18. [DOI: 10.1016/S0010-4485\(97\)00080-7](https://doi.org/10.1016/S0010-4485(97)00080-7).

2. Sederberg T.W., Parry S.R. Free-form deformation of solid geometric models // Proceedings of the 13th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. – 1986. – Vol. 20. – № 4. – P. 151–160. [DOI: 10.1145/15922.15903](https://doi.org/10.1145/15922.15903).
3. Botsch M., Sorkine O. Variational surface reconstruction and applications to mesh processing // Computer Graphics Forum. – 2008. – Vol. 27. – № 1. – P. 69–83. [DOI: 10.1111/j.1467-8659.2007.01102.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2007.01102.x).
4. Hughes T.J.R., Cottrell J.A., Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2005. – Vol. 194. – № 39–41. – P. 4135–4195. [DOI: 10.1016/j.cma.2004.10.008](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.10.008).
5. Jacobson A., Panozzo D., et al. libigl: A simple C++ geometry processing library // Proceedings of the 2013 SIGGRAPH Asia Technical Briefs. – 2013. – P. 1–2. [DOI: 10.1145/2542285.2542295](https://doi.org/10.1145/2542285.2542295).
6. Wang W., Pottmann H., Liu Y. Focal surfaces of discrete geometry // Computer Aided Geometric Design. – 2006. – Vol. 23. – № 1. – P. 60–75. [DOI: 10.1016/j.cagd.2005.08.005](https://doi.org/10.1016/j.cagd.2005.08.005).
7. Cottrell J.A., Hughes T.J.R., Bazilevs Y. Isogeometric analysis: Toward integration of CAD and FEA // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2009. – Vol. 16. – № 1. – P. 1–25.
8. Catmull E., Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes // Computer-Aided Design. – 1978. – Vol. 10. – № 6. – P. 350–355. [DOI: 10.1016/0010-4485\(78\)90110-0](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90110-0).
9. Pottmann H., Schiftner A., Bo P., Schmiedhofer H., Wang W., Baldassini N., Wallner J. Freeform honeycomb structures // Computer Graphics Forum. – 2010. – Vol. 29. – № 5. – P. 1857–1865. [DOI: 10.1111/j.1467-8659.2010.01816.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2010.01816.x).

10. Alliez P., Cohen-Steiner D., Devillers O., Lévy B., Desbrun M. Anisotropic polygonal remeshing // ACM Transactions on Graphics. – 2003. – Vol. 22. – № 3. – P. 485–493. DOI: [10.1145/882262.882305](https://doi.org/10.1145/882262.882305).
11. Piegl L., Tiller W. On the surface of revolution of a rational Bézier curve // Computer-Aided Design. – 1999. – Vol. 31. – № 4. – P. 255–260.
12. Botsch M., Kobbelt L. A remeshing approach to multiresolution modeling // Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing. – 2004. – P. 185–192.
13. Loop C. Smooth subdivision surfaces based on triangles: master's thesis. – Salt Lake City: University of Utah, 1987. – 74 p. URL: <https://www.microsoft.com/en-us/research/publication/smooth-subdivision-surfaces-based-on-triangles/>.
14. Zorin D., Schröder P., Sweldens W. Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology // Proceedings of the 23rd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. – 1996. – P. 189–192. DOI: [10.1145/237170.237248](https://doi.org/10.1145/237170.237248).
15. Lévy B., Petitjean S., Ray N., Maillot J. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation // ACM Transactions on Graphics. – 2002. – Vol. 21. – № 3. – P. 362–371. DOI: [10.1145/566654.566590](https://doi.org/10.1145/566654.566590).